

**Vorlesung: Phylogenetik  
Wintersemester 2006/2007**

**Übungen**

**Übung 10, Besprechung: 18.01.2007**

**1. Mengensysteme.**

Sei  $\{A_i | i \in I\}$  eine Menge von Teilmengen einer gemeinsamen Obermenge  $\Omega$ . Beweisen Sie die beiden „de Morgan’schen Regeln“

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^C = \bigcap_{i \in I} A_i^C \quad \text{und} \quad \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^C = \bigcup_{i \in I} A_i^C,$$

wobei  $A_i^C$  das Komplement der Menge  $A_i$  ist, d.h.  $A_i^C = \Omega \setminus A_i$ .

**2.  $\sigma$ -Algebra.**

- (a) Ein Würfel wird geworfen. Die Ergebnismenge ist  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Was ist die kleinste mögliche  $\sigma$ -Algebra?
- (b) Eine Münze wird geworfen. Die Ergebnismenge ist  $\Omega = \{\text{Zahl, Kopf}\}$ . Was ist die kleinste und was ist die größte mögliche  $\sigma$ -Algebra?

**3.  $\sigma$ -Algebra.**

Sei der Ereignisraum  $\Omega = \{A, B, C, D, E\}$ . Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen  $\sigma$ -Algebren sind.

- (a)  $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{A, B, C\}, \{D, E\}, \Omega\}$
- (b)  $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{A\}, \{B\}, \{A, B\}, \{C, D, E\}, \{A, C, D, E\}, \{B, C, D, E\}, \Omega\}$
- (c)  $\mathcal{F}_3 = \{\emptyset, \{A\}, \{B\}, \{C, D, E\}, \{A, C, D, E\}, \{B, C, D, E\}, \Omega\}$
- (d)  $\mathcal{F}_4 = \{\emptyset, \{A, B, C\}, \{C, D, E\}, \{A, B\}, \{D, E\}, \{A, B, D, E\}, \Omega\}$

Bitte wenden

4. **Wahrscheinlichkeitsraum, Unabhängigkeit von Ereignissen.**

Es sei  $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$  der Wahrscheinlichkeitsraum eines Würfels mit Gleichverteilung  $\Pr$  und  $(\Omega_2, \Pr_2) = (\Omega, \Pr) \times (\Omega, \Pr)$  der Wahrscheinlichkeitsraum von zwei unabhängigen Würfeln (die Würfel sind unterscheidbar, wir nennen sie Würfel 1 und Würfel 2 und schreiben die Elementarereignisse als  $(e_1, e_2)$ ).

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse in  $\Omega_2$ .

- (a) Würfel 1 zeigt eine 4.
- (b) Die Summe von beiden Würfeln ist 9.
- (c) Die Summe von beiden Würfeln ist 7.
- (d) Würfel 2 zeigt eine ungerade Zahl.
- (e) Würfel 1 zeigt eine ungerade und Würfel 2 eine gerade Zahl.