Übungen zur Phylogenetik Vorlesung

Universität Bielefeld, WS 2009/2010
Dipl.-Inform. Roland Wittler · Dipl.-Inform. Peter Husemann

http://wiki.techfak.uni-bielefeld.de/gi/GILectures/2009winter/Phylogenetik

Blatt 11 vom 13.01.2010
Abgabe in einer Woche zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 1 Sigma-Algebren. **(6 Punkte)**

(a) Ein Würfel wird geworfen. Der Stichprobenraum ist $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Was ist die kleinste mögliche σ-Algebra?

(b) Eine Münze wird geworfen. Der Stichprobenraum ist $\Omega = \{\text{Zahl}, \text{Kopf}\}$.
Was ist die kleinste und was ist die größte mögliche σ-Algebra?

(c) Sei der Stichprobenraum $\Omega = \{A, B, C, D, E\}$.
Bestimme, welche der folgenden Mengen σ-Algebren sind:

(i) $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{A, B, C\}\{D, E\}, \Omega\}$

(ii) $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{A\}, \{B\}, \{A, B\}, \{C, D, E\}, \{A, C, D, E\}, \{B, C, D, E\}, \Omega\}$

(iii) $\mathcal{F}_3 = \{\emptyset, \{A\}, \{B\}, \{C, D, E\}, \{A, C, D, E\}, \{B, C, D, E\}, \Omega\}$

(iv) $\mathcal{F}_4 = \{\emptyset, \{A, B, C\}, \{C, D, E\}, \{A, B\}, \{D, E\}, \{A, B, D, E\}, \Omega\}$

Aufgabe 2 Stichprobenraum, Unabhängigkeit von Ereignissen. **(5 Punkte)**
Sei $\Omega_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), \ldots, (6, 6))\}$ der Stichprobenraum von zwei fairen Würfeln. Die Würfel sind unterscheidbar, so bezeichnet z. B. $(4, 3)$ das Elementarereignis, bei dem der erste Würfel eine Vier zeigt und der zweite eine Drei. (Tipp: Bestimme zuerst $|\Omega_2|$).
Formuliere folgende Ereignisse aus Ω_2 mathematisch und gib deren Wahrscheinlichkeit an:

(a) Würfel 1 zeigt eine 4.

(b) Die Summe von beiden Würfeln ist 9.

(c) Die Summe von beiden Würfeln ist 7.

(d) Würfel 2 zeigt eine ungerade Zahl.

(e) Würfel 1 zeigt eine ungerade und Würfel 2 eine gerade Zahl.

Aufgabe 3 Grundlagen von Markovketten. **(6 Punkte)**
Ein Verteilungsvektor ist ein (Zeilen-)Vektor von nichtnegativen Zahlen, die sich zu 1 addieren. Eine stochastische Matrix ist eine quadratische Matrix, in der jede Zeile ein Verteilungsvektor ist.

(a) Zeigen Sie:
Ist π ein Verteilungsvektor und P eine stochastische Matrix, dann ist auch $\pi \cdot P$ ein Verteilungsvektor.

(b) Zeigen Sie:
Sind P und Q stochastische Matrizen, dann ist auch $P \cdot Q$ eine stochastische Matrix.